Université de Nantes
X1X0010 Mathématiques BGC
Année 2017-2018

CC1 - 20 Octobre 2017

Durée : 1h

Exercice 1

On considère les nombres complexes

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i.$$

On définit leur quotient $z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Mettre z sous forme algébrique.
   On calcule :
$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \\ &= \frac{(1-i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}i - i - i(-\sqrt{3}i)}{(1^2+\sqrt{3}^2)} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3}) + i(-1-\sqrt{3})}{4} \end{aligned}$$

2. Mettre z_1 et z_2 sous la forme $re^{i\theta}$, où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme exponentielle).
   Il s'agit de calculer le module et l'argument de z_1 et z_2. On a :
   - $z_1 = 1 - i$, donc $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. On réécrit
   $$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$
   D'où $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
   - $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, donc $|z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. On réécrit
   $$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right).$$
   D'où $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. En utilisant la question précédente, déterminer la forme exponentielle de z.
   On calcule :
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

4. *(Bonus)* En déduire la forme exponentielle de z^2.
   En utilisant la question précédente, on a :
$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right)^2 = \frac{2}{4}e^{-2i\frac{7\pi}{12}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{7\pi}{6}}$$

Exercice 2
Écrire sous la forme d'une somme l'expression suivante :
$$\sin(x)\cos(2x)^2$$
Il s'agit d'utiliser les formules d'Euler :
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
et
$$\cos(2x) = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}.$$
On a alors
$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(2x)^2 &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{2i}\frac{(e^{4ix} + 2 + e^{-4ix})}{4} \\
&= \frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{4ix} + 2 + e^{-4ix}) \\
&= \frac{1}{8i}(e^{5ix} + 2e^{ix} + e^{-3ix} - e^{3ix} - 2e^{-ix} - e^{-5ix}) \\
&= \frac{1}{4}\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} + \frac{2}{4}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \\
&= \frac{1}{4}\sin(5x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).
\end{aligned}$$

Exercice 3

Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{x}$.
On reconnaît une indétermination. On réécrit donc l'expression en utilisant l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})}.$$

En utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, on a :

$$\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{(x+3)-(x+1)}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})} = \frac{4}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})}.$$

Il n'y a alors plus d'indétermination et on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})} = 0.$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \arctan(\ln(x))$.
Il s'agit d'utiliser la loi de ocmposition des limites. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{y \to -\infty} \arctan(y) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to 0} \arctan(\ln(x)) = -\frac{\pi}{2}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - x + 1}{2x^4 - x + 4}$.
On factorise par le terme de plus haut degré :

$$\frac{3x^4 - x + 1}{2x^4 - x + 4} = \frac{x^4\left(3 - \frac{x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(2 - \frac{x}{x^4} + \frac{4}{x^4}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{2 - \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^4}}.$$

Lorsque $x \to +\infty$, les termes $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, et $\frac{1}{x^4}$ tendent vers 0. On a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - x + 1}{2x^4 - x + 4} = \frac{3}{2}.$$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{x+2}$.
Pas d'indétermination ici ! On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} x + 2 = 2 \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{x+2} = \frac{1}{2}$.

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$.
On reconnaît une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Pour s'en débarrasser, on factorise les polynômes (par exemple avec le discriminant). On trouve

$$\begin{cases} x^2-2x+1 = (x-1)^2 \text{ (Attention, 1 est racine double !)} \\ x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \end{cases}$$

donc

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}.$$

La limite est donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+2} = 0$.

f) *(Bonus)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(1/x^2)-1}{1/x^2}$.
Il s'agit une fois encore de composition de limites. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cos(y)-1}{y} = 0 \text{ (C'est une limite à connaître !)} \end{cases}$$

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(1/x^2)-1}{1/x^2} = 0$.